École Normale Supérieure de Cachan
option biologie 1/3

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème, on considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par X et Y les variables marginales de Z, indépendantes ou non en probabilité. L'objectif du problème est l'étude de la variable $U = X + Y$, dans différents cas où les variables marginales sont de types classiques. Les différentes parties du problème sont indépendantes les unes des autres, chacune d'elles concerne un type de variables (discrètes finies, discrètes infinies, continues).

PREMIÈRE PARTIE

CAS DES VARIABLES DISCRÈTES FINIES

On suppose que Z a pour image une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et lorsque $(i, j) \in \mathrm{Im}Z$, on note $p(i, j)$ la probabilité $P(Z = (i, j))$. De plus, pour tout entier $K > 1$, on note $[0, K]$ l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., K\}$.

I. Cas de variables uniformes indépendantes.

Deux entiers M et N ($M > 1$ et $N > 1$) étant donnés, on suppose que $\mathrm{Im}Z = [0, M] \times [0, N]$ et $p(i, j) = \dfrac{1}{(M + 1)(N + 1)}$ quel que soit $(i, j) \in \mathrm{Im}Z$.

a. Vérifier que $\sum_i \sum_j p(i, j) = 1$.

b. Déterminer les lois des variables marginales X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

c. Déterminer dans le cas $N = M$, puis dans le cas $N > M$, la loi de la variable $X + Y$.

II. Étude d'un autre exemple.

L'entier N étant donné supérieur à un, on suppose :

$$\mathrm{Im}Z = \{(i, j) / i \in [0, N] \quad \text{et} \quad i \leqslant j \leqslant i + N\}$$

et, pour tout couple (i, j) de ImZ :

$$p(i, j) = \frac{1}{(N + 1)^2}.$$

a. Déterminer les lois des variables marginales X et Y. Ces variables sont-elles indépendantes ?

b. Déterminer la loi de la variable $X + Y$.

III. Cas de variables géométriques.

Outre les deux entiers M et N, on suppose donnés deux nombres réels p et q distincts appartenant à $]0, 1[$ et tels que $p + q = 1$. On suppose que $\mathrm{Im}Z = [0, M] \times [0, N]$ et que, pour tout couple (i, j) de ImZ, on ait :

$$p(i, j) = K p^i q^{N-i} \quad \text{où K est une constante.}$$

a. Déterminer, à l'aide de p, de q, de M et de N, la valeur de cette constante K.

b. Déterminer les lois des variables marginales X et Y.

c. Déterminer la loi de $X + Y$ dans le cas $M = N$.

DEUXIÈME PARTIE CAS DES VARIABLES DISCRÈTES INFINIES

1. **Préliminaires.**

a. Une suite de nombres réels positifs $(a_{i,j})$, indexée par l'ensemble de tous les couples (i, j) de $\mathbb{N}^2$, étant donnée, on suppose que :

— pour tout j élément de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ est convergente (de somme notée s_j) ;

— la série $\sum_{j=0}^{+\infty} s_j$ est convergente, sa somme étant s.

Montrer que, si ces deux conditions sont vérifiées, les séries $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ sont toutes convergentes et que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \right)$ est également convergente (de somme s).

Dans la suite, une telle somme double sera notée $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}$, son calcul peut donc être conduit de deux façons.

b. On suppose que a est un nombre réel vérifiant $0 < a < 1$, montrer que la série $\sum_{i=1}^{+\infty} i\, a^{i-1}$ est convergente et calculer sa somme.

c. Plus généralement, prouver, lorsque $0 < a < 1$, que la série : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+k-1)}{k!} a^k$

est convergente pour tout entier j positif et que : $\frac{1}{(1-a)^j} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{j(j+1)\dots(j+k-1)\,a^k}{k!}$.

d. On suppose toujours $0 < a < 1$. Prouver que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} (i+1)(i+2)\dots(i+j)\,a^i$ est convergente pour toût entier $j \geqslant 1$. Déterminer la somme de cette série de deux façons différentes :

— d'une part, en remarquant qu'elle peut s'obtenir par une certain nombre de dérivations successives de $\frac{a^j}{1-a}$.

— d'autre part, en utilisant le résultat de la question précédente.

2. **Variables géométriques.**

a. On suppose que la variable Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ et que, pour tout couple (i, j) de $\mathbb{N}^2$:

$$p(i,j) = \mathrm{P}\big(\mathrm{Z} = (i,j)\big) = a b^i c d^j$$

où a, b, c, d sont des nombres donnés de $]0, 1[$ avec $a + b = 1$ et $c + d = 1$.

Déterminer les lois marginales de Z et la loi de la variable $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

b. Les notations restant les mêmes, on suppose maintenant :

$$p(i,j) = \mathrm{K}\,(i+j)\,b^i\,d^j$$

où K est une constante.

Déterminer la constante K, les lois marginales et la loi de $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$.

3. **Autre exemple.**

On considère deux nombres a et b dans $]0, 1[$ avec $a + b < 1$. Dans cette question, la variable Z à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ possède la loi de probabilité définie par :

$p(i, 0) = \mathrm{K}\,a^i$ pour tout $i \geqslant 1$,

$p(0, j) = 0$ pour tout $j \geqslant 0$ et, dans tous les autres cas,

$$p(i,j) = \frac{\mathrm{K}\,i(i+1)(i+2)\dots(i+j-1)\,a^i\,b^j}{j!}.$$

a. Calculer, pour tout j fixé $\geqslant 1$, la somme de la série : $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i(i+1)\ldots(i+j-1)\,a^i\,b^j}{j!}$ et en déduire la constante K.

b. Déterminer les lois de X et Y.

c. Déterminer la loi de X + Y.

TROISIÈME PARTIE CAS DE VARIABLES CONTINUES

Dans ce qui suit, Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et admettant une densité $\rho : (x, y) \longmapsto \rho(x, y)$ telle que les fonctions $x \longmapsto \rho(x, y)$ et $y \longmapsto \rho(x, y)$ soient continues sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points qui sont des discontinuités de première espèce pour l'une ou l'autre de ces fonctions. On désigne par ρ_X et ρ_Y les densités des variables marginales X et Y. On admettra que la variable X + Y admet une densité et que la densité de cette variable, notée U, est définie pour tout u de $\mathbb{R}$ par :

$$\rho_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, u - x)\,dx$$

(l'intégrale du second membre étant en particulier convergente quel que soit u dans $\mathbb{R}$).

1. **Cas où X et Y sont des variables uniformes.**

a. On suppose que la densité ρ de Z est définie par :

$$\rho(x, y) = 1 \quad \text{si} \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$
$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1].$$

Déterminer les lois marginales et la loi de U = X + Y.

b. On suppose que la densité de Z est définie par :

$$\begin{cases} \rho(x, y) = K[1 + xy(x^2 - y^2)] & \text{si} \quad (x, y) \in [-1, +1] \times [-1, +1] \\ \rho(x, y) = 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la constante K, les lois des variables marginales X et Y et la loi de U = X + Y.

2. **Cas de variables suivant la première loi de Laplace.**

La variable Z possédant la densité définie par :

$$\rho(x, y) = \frac{1}{4} e^{-|x|} e^{-|y|}$$

pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, déterminer la loi de U = X + Y.

3. Cas de variables de type exponentiel.

a. On suppose que la densité ρ est définie par :

$$\rho(x, y) = e^{-y} \quad \text{si} \quad (x, y) \text{ vérifie } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant x$$

et

$$\rho(x, y) = 0 \quad \text{si} \quad (x, y) \text{ vérifie } x < 0 \text{ ou } y < x.$$

Montrer que cette fonction est bien une densité de probabilité, et déterminer les lois de X, de Y et de X + Y.

b. On suppose que la densité ρ de la variable Z est définie par :

$$\begin{cases} \rho(x, y) = 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ \rho(x, y) = K e^{-\lambda x} e^{-|y|} |x + y| & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

λ étant une constante strictement positive donnée.

Déterminer la constante K, les lois de X et Y et la loi de U = X + Y.